Semántica Operacional para la Programación en Lógica

Lógica para Ciencias de la Computación

Primer Cuatrimestre de 2008

– Material Adicional –

Semánticas para la Programación en Lógica

- Se han explorado distintas alternativas para capturar formalmente la semántica de los programas lógicos:
  - Semántica Operacional
  - Semántica Declarativa
  - Semántica de Punto Fijo
- En lo que resta, abordaremos esta primer variante, la Semántica Operacional.

Basamentos Teóricos

- La Programación en Lógica descansa sobre un subconjunto del Cálculo de Predicados, conocido como Lógica de Horn.
  - Un programa lógico es un conjunto de cláusulas de Horn.
  - Una cláusula de Horn es una cláusula con a lo sumo un literal positivo.
  - Una cláusula es una disyunción de literales.
  - Un literal es un predicado o su negación.

Posibles variantes de cláusulas de Horn

	En Prolog
• Sólo un literal positivo: – A	A. (hecho)
• Un literal positivo y algunos negativos: – $A \vee \neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \ldots \vee \neg B_n$ – $A \vee \neg(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)$ – $A \leftarrow B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n$	A:- B_1 , B_2 , …, B_n (regla)
• Sólo literales negativos: – $\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \ldots \vee \neg B_n$ – $\neg(B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n)$ – $\leftarrow B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_n$ meta definida o consulta	?- B_1 , B_2 , …, B_n (consulta)

Composición de Sustituciones

Def: Una sustitución es un conjunto finito de pares ordenados $[X_i, t_i]$ donde X_i es una variable y t_i es un término, tales que para cada $i \neq j$, se verifica que $X_i \neq X_j$, y a su vez para cada i, j se verifica que X_i no aparece en t_j.

- Intuitivamente, la composición de dos sustituciones σ y θ es una nueva sustitución λ tal que $(A\sigma)\theta = A\lambda$

Def: Sean $\sigma = \{ [U_1, s_1], \ldots, [U_m, s_m] \}$ y $\theta = \{ [V_1, t_1], \ldots, [V_n, t_n] \}$ sendas sustituciones, tales que $U_i \neq V_j$ y U_1 no aparece en t_j, para todo par i, j tal que $1 \leqslant i \leqslant m$ y $1 \leqslant j \leqslant n$. Entonces, definimos la composición de σ con θ, notado $\sigma\theta$, de la siguiente manera:

$$\sigma\theta = \{[U_1, s_1\theta], \ldots, [U_m, s_m\theta] \} \cup \{ [V_1, t_1], \ldots, [V_n, t_n]\}$$

Comp. de Sust.: Ejemplo

$$\sigma = \{ [X, f(S)], [Y, a], [Z, T] \}$$
$$\theta = \{ [S, W], [T, b] \}$$
$$\sigma\theta =$$
$$\{[X, f(S)\theta], [Y, a\theta], [Z, T\theta] \} \cup \{ [S, W], [T, b]\} =$$
$$\{[X, f(W)], [Y, a], [Z, b], [S, W], [T, b]\}$$

Def: Sean $\sigma = \{ [U_1, s_1], \ldots, [U_m, s_m] \}$ y $\theta = \{ [V_1, t_1], \ldots, [V_n, t_n] \}$ sendas sustituciones, tales que $U_i \neq V_j$ y U_i no aparece en t_j, para todo par i, j tal que $1 \leqslant i \leqslant m$ y $1 \leqslant j \leqslant n$. Entonces, definimos la composición de σ con θ, notado $\sigma\theta$, de la siguiente manera:

$$\sigma\theta = \{[U_1, s_1\theta], \ldots, [U_m, s_m\theta] \} \cup \{ [V_1, t_1], \ldots, [V_n, t_n]\}$$

Comp. de Sust.: Ejemplo

$\sigma = \{\ [X, f(S)],\ [Y,\ a],\ [Z,\ T]\ \}$
$\theta = \{\ [S, W],\ [Z,\ b]\ \}$

$\sigma = \{\ [X, f(S)],\ [Y,\ a]\ \}$
$\theta = \{\ [Z, Y]\ \}$

$\sigma = \{\ [X,\ f(S)],\ [Y,\ a]\ \}$
$\theta = \{\ [S,\ g(X)]\ \}$

Def: Sean $\sigma = \{\ [U_1,\ s_1],\ \ldots,\ [U_m,\ s_m]\ \}$ y $\theta = \{\ [V_1,\ t_1],\ \ldots,\ [V_n,\ t_n]\ \}$ sendas sustituciones, tales que $U_i \neq V_j$ y U_i no aparece en t_j, para todo par $i,\ j$ tal que $1 \leqslant i \leqslant m$ y $1 \leqslant j \leqslant n$. Entonces, definimos la composición de σ con θ, notado $\sigma\theta$, de la siguiente manera:

$$\sigma\theta = \{[U_1,\ s_1\theta],\ \ldots,\ [U_m,\ s_m\theta]\ \} \cup \{\ [V_1,\ t_1],\ \ldots,\ [V_n,\ t_n]\}$$

Sustituciones Unificadoras y m.g.u./s

Def: Sea S un conjunto de términos/fbfs. Diremos que θ es una sustitución unificadora (o simplemente unificador) para S si $S\theta$ es un conjunto unitario.

Def: Sea θ un unificador para S. Diremos que θ es el unificador más general (o bien, m.g.u.) de S si se verifica que para todo otro unificador σ para S, existe una sustitución γ tal que $\sigma = \theta\gamma$.

Sust. Unif. y m.g.u./s: Ejemplos

$S = \{\mathrm{p(X)},\ \mathrm{p(Y)}\}$ tiene varios posibles unificadores:

- $\theta_1 = \{[\mathrm{X, a}],\ [\mathrm{Y, a}]\}$
- $\theta_2 = \{[\mathrm{X, f(Z)}],\ [\mathrm{Y, f(Z)}]\}$
- $\theta_3 = \{[\mathrm{X, Y}]\}$

En particular, θ_3 es un unificador más general para S.

Ejercicio:

Construcción de Árboles SLD

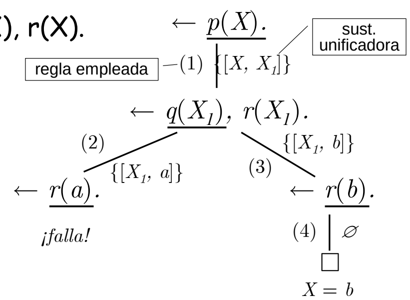
Def: Sea $\boldsymbol{P}$ un programa definido y $\boldsymbol{G}$ una meta definida. El árbol SLD para $\boldsymbol{P} \cup \boldsymbol{G}$ es un árbol que satisface las siguientes condiciones:

1. Cada nodo del árbol se etiqueta con una meta definida.
2. El nodo raíz debe estar etiquetado con G.
3. Sea $\leftarrow A_1 \wedge \ldots \wedge A_n,\ n > 0$, la etiqueta de algún nodo y sea A_k la submeta seleccionada. Para cada cláusula $A \leftarrow B_1 \wedge \ldots \wedge B_m$ de $\boldsymbol{P}$ tal que A_k y A unifiquen con un m.g.u. θ, debe existir un nodo hijo del nodo en cuestión que esté etiquetado con:

$$\leftarrow A_1\theta \wedge \ldots \wedge A_{k-1}\theta \wedge B_1\theta \wedge \ldots \wedge B_m\theta \wedge A_{k+1}\theta \wedge \ldots \wedge A_n\theta$$

Ejemplo

1. p(X) :- q(X), r(X).
2. q(a).
3. q(b).
4. r(b).



?- p(X).
X = b

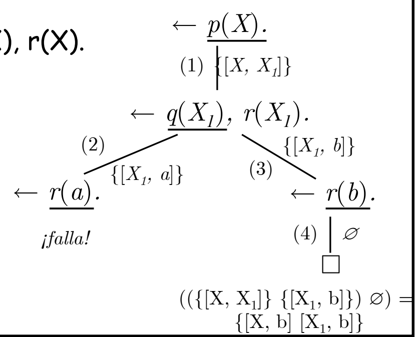
Tipos de nodos hoja en los Árboles SLD

- Existen dos tipos de nodo hoja:
  - Nodos hoja exitosos: son aquellos etiquetados con la cláusula vacía.
  - Nodos hoja fallidos: son aquellos que no están etiquetados con la cláusula vacía.
- Los nodos exitosos señalan que se ha encontrado una respuesta a la consulta inicial.
- Dicha respuesta se obtiene componiendo a las distintas sustituciones realizadas a lo largo de la rama que contiene al nodo hoja exitoso en cuestión.

Obtención de la respuesta: Ejemplo

1. p(X) :- q(X), r(X).
2. q(a).
3. q(b).
4. r(b).

?- p(X).
X = b



Semántica Operacional

- La Semántica Operacional para la Programación en Lógica se basa en poder capturar de manera formal la existencia de los nodos exitosos dentro de un árbol SLD.
- El siguiente conjunto de definiciones formales apunta a ese objetivo, explorando en profundidad sólo una rama del árbol.

Derivación entre cláusulas

Def: Sea G una meta de la forma $\leftarrow A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, $n > 0$, y sea C una cláusula de la forma $A \leftarrow B_1 \wedge \ldots \wedge B_m$, $m \geq 0$. Diremos que G' se deriva de G y C, usando un m.g.u. θ, si se verifican las siguientes condiciones:

1. A_k es uno de las submetas que aparecen en G.
2. θ es el unificados más general entre entre A_k y A.
3. G' guarda exactamente la forma:

$$\leftarrow A_1\theta \wedge \ldots \wedge A_{k-1}\theta \wedge B_1\theta \wedge \ldots \wedge B_m\theta \wedge A_{k+1}\theta \wedge \ldots \wedge A_n\theta$$

Derivación y Refutación SLD

Def: Sea $\mathbf{P}$ un programa definido y G una meta definida. Una derivación SLD para $\mathbf{P} \cup \{G\}$ consiste de:

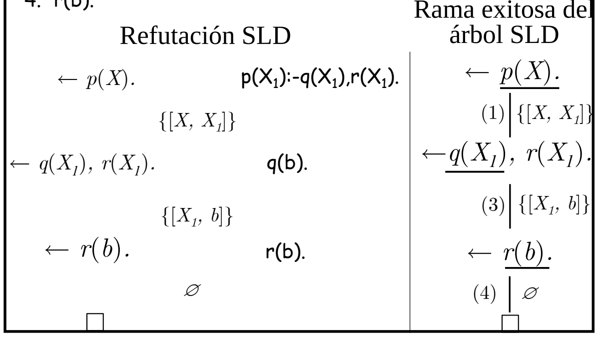
- una secuencia de metas G_0, G_1, G_2, …, y
- una secuencia de variantes de cláusulas de programa C_1, C_2, …, y
- una secuencia de m.g.u.'es θ_1, θ_2, …,

tales que $G_0 = G$, y cada G_{i+1}, $i \geq 0$, se deriva de G_i y de C_{i+1} mediante el m.g.u. θ_{i+1}.

Def: Sea $\mathbf{P}$ un prog. definido y G una meta definida. Una refutación SLD para $\mathbf{P} \cup \{G\}$ es una derivación SLD para $\mathbf{P} \cup \{G\}$ que tiene a la cláusula vacía como última meta de la derivación.

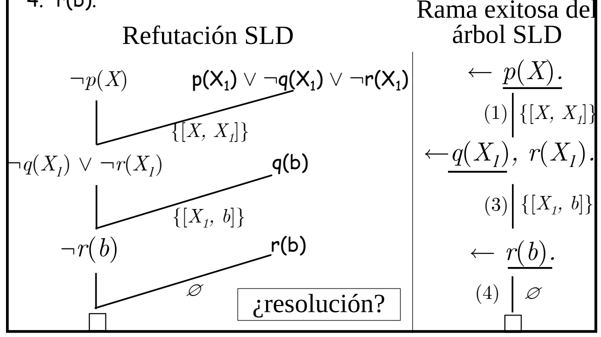
Ejemplo

1. p(X) :- q(X), r(X).
2. q(a).
3. q(b).
4. r(b).



Ejemplo

1. p(X) :- q(X), r(X).
2. q(a).
3. q(b).
4. r(b).



Conjunto de Éxito

Def: Sea $\mathbf{P}$ un programa definido. El conjunto de éxito de $\mathbf{P}$ es el conjunto de todos los $A \in \mathbb{B}_{\mathbf{P}}$ tales que $\mathbf{P} \cup \{ \leftarrow \boldsymbol{A}. \}$ tiene una refutación SLD.

Intuitivamente, es el conj. de todos las átomos fijos (sin variables) construibles utilizando predicados, functores y constantes que aparecen en P

El conjunto de éxito de un programa definido P constituye su semántica operacional.