Semántica Declarativa para la Programación en Lógica

Lógica para Ciencias de la Computación

Primer Cuatrimestre de 2008

– Material Adicional –

Semánticas para la Programación en Lógica

- Como sabemos, existen diversas alternativas para capturar la semántica de los programas lógicos, a saber:
  - Semántica Operacional
  - Semántica Declarativa
  - Semántica de Punto Fijo
- La Semántica Operacional fue introducida en clases anteriores.
- En la clase de hoy, abordaremos la Semántica Declarativa.

Semántica Declarativa

- La Semántica Declarativa se basa en la simple idea de interpretar/considerar a un programa lógico como lo que es:
  - un conjunto de fbfs (cláusulas),
  - expresadas en una determinada teoría formal.

- Bajo esta nueva óptica, se pueden aplicar los familiares conceptos de interpretación y de modelo a programas lógicos.

Basamentos Teóricos

Para las siguientes definiciones, sea $\mathbf{P}$ un programa definido:

Def: Denominaremos universo de Herbrand para $\mathbf{P}$, denotado $\mathbb{U}_{\mathbf{P}}$, al conjunto de todos los términos fijos que pueden formarse a partir de las constantes y los functores que aparecen en $\mathbf{P}$. Si $\mathbf{P}$ no contuviera constante alguna, se debe agregar una constante figurativa para poder construir los términos fijos.

Def: Denominaremos base de Herbrand para $\mathbf{P}$, denotado $\mathbb{B}_{\mathbf{P}}$, al conjunto de todos los átomos fijos (predicados aplicados a términos) que pueden formarse a partir de predicados que aparecen en $\mathbf{P}$ y términos de $\mathbb{U}_{\mathbf{P}}$.

Ejemplo

1. par(0).
2. par(s(s(X))) :- par(X).

$$\mathbb{U}_{\mathbf{P}} = \{0,\ s(0),\ s(s(0)),\ \ldots\}$$

$$\mathbb{B}_{\mathbf{P}} = \{par(0),\ par(s(0)),\ par(s(s(0))),\ \ldots\}$$

---

1. p(X) :- q(X).

$$\mathbb{U}_{\mathbf{P}} = \{c\}$$

$$\mathbb{B}_{\mathbf{P}} = \{p(c),\ q(c)\}$$

Interpretaciones de Herbrand

Def: Denominaremos interpretación de Herbrand para $\mathbf{P}$ a todo $I \subseteq \mathbb{B}_{\mathbf{P}}$.

- Una interpretación de Herbrand es una interpretación en el sentido tradicional. Es decir, dada una int. de Herbrand I, cada fbf (cláusula) es verdadera o falsa de acuerdo a I.

- Un conjunto de átomos fijos $I \subseteq \mathbb{B}_{\mathbf{p}}$ está representando una interpretación en la que aquellos y solo aquellos átomos fijos presentes en I se consideran verdaderos.

Modelos de Herbrand

- La siguiente definición especifica cuándo una interpretación I hace verdadera (modela) una fbf o cláusula de Programa.

Def: Una interpretación de Herbrand I se dice modelo de una regla $r = A \leftarrow B_1 \wedge \ldots \wedge B_n$ si y sólo si, para toda instancia fija $A' \leftarrow B_1' \wedge \ldots \wedge B_n'$ de r, siempre que $B_i' \in I$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces $A' \in I$.

Def: Una interpretación de Herbrand I se dice modelo de $\mathbf{P}$ si y sólo si, I es modelo de toda regla presente en $\mathbf{P}$.

Modelos de Herbrand: Ejemplo

p(X) :- q(X), r(X).

q(a).

q(b).

Programa **P**

$I_1 = \{$p(b), q(b), r(b), q(a)$\}$ es modelo de **P**

$I_2 = \{$q(b), r(b), q(a)$\}$ no es modelo de **P**

$I_3 = \{$p(b), q(b), r(b)$\}$ no es modelo de **P**

$I_4 = \{$q(a), q(b)$\}$ es modelo de **P**

Def: Una interpretación de Herbrand I se dice modelo de una regla $r = A \leftarrow B_1 \wedge \ldots \wedge B_n$ si y sólo si, para toda instancia fija $A' \leftarrow B_1' \wedge \ldots \wedge B_n'$ de r, siempre que $B_i' \in I$ para todo i, $1 \leqslant i \leqslant n$, entonces $A' \in I$.

Def: Una interpretación de Herbrand I se dice modelo de **P** si, y sólo si, I es modelo de toda regla presente en **P**.

Mínimo Modelo de Herbrand y Semántica Declarativa

Def: Llamemos $\mathbf{M_P}$ al *mínimo modelo de Herbrand de P*, es decir, al menor de los modelos de Herbrand de $\mathbf{P}$ en el sentido de la inclusión de conjuntos.

> $\mathbf{M_p}$ es el significado asociado a $\mathbf{P}$ de acuerdo a la Semántica Declarativa.

<u>Propiedad:</u>

Si $\mathbb{HM}$ representa el conjunto de todos los modelos de Herbrand de $\mathbf{P}$, entonces se verifica que:

$$\mathbf{M_P} = \bigcap_{\{I \,\in\, \mathbb{HM}\}}$$

Cálculo del Mínimo Modelo

1. p :- q.
2. q.
3. r : - s.

$$\mathbb{U}_{\mathbf{P}} = \{c\}$$

$$\mathbb{B}_{\mathbf{P}} = \{p,\ q,\ r,\ s\}$$

- Consideramos todas las interpretaciones: $\mathcal{P}(\mathbb{B}_{\mathbf{P}})$
- Nos quedamos con aquellas que son modelos:

$$M_1 = \{p,\ q,\ r,\ s\} \quad M_2 = \{p,\ q,\ r\} \quad M_3 = \{p,\ q\}$$

- Calculamos $\mathbf{M_P}$ intersectando todos los modelos de H. de $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{M_P} = M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \{p,\ q\}$$

Mínimo Modelo

Observaciones:

- $\mathbb{B}_{\mathbf{P}}$ siempre será modelo de $\mathbf{P}$, para todo $\mathbf{P}$.
- $\varnothing$ será modelo de $\mathbf{P}$ sssi $\mathbf{P}$ no posee hechos.
- $\mathbb{B}_{\mathbf{P}}$ será infinito sssi $\mathbb{U}_{\mathbf{P}}$ es infinito.
- $\mathbb{U}_{\mathbf{P}}$ será infinito sssi $\mathbf{P}$ tiene al menos un functor.

Si la base de Herbrand es infinita, existen infinitas interpretaciones, por lo que la Semántica Declarativa no podrá ser computada de la manera usual en esos casos.