Semántica de Punto Fijo para la Programación en Lógica

Lógica para Ciencias de la Computación

Primer Cuatrimestre de 2008

– Material Adicional –

Semánticas para la Programación en Lógica

- Como sabemos, existen diversas alternativas para capturar la semántica de los programas lógicos, a saber:
  - Semántica Operacional
  - Semántica Declarativa
  - Semántica de Punto Fijo
- La Semántica Operacional y la Declarativa fueron introducida en clases anteriores.
- En lo que resta, abordaremos la que falta, la Semántica de Punto Fijo.

Semántica de Punto Fijo

- La Semántica de Punto Fijo se origina del estudio del punto de contacto entre la lógica y el álgebra.

- Conceptos familiares en álgebra tales como retículos, mapeos y puntos fijos permiten dotar de significado a un programa lógico.

Menor Punto Fijo de un Mapeo

Para las siguientes definiciones, sea L un retículo completo, y $\mathbf{T}\colon L \to L$ un mapeo.

Def: Sea A un elemento de L. Diremos que A es un punto fijo de $\mathbf{T}$ si, y sólo si, $\mathbf{T}(A) = A$.

Def: Sea A un elemento de L. Diremos que A es el menor punto fijo de $\mathbf{T}$ si, y sólo si, para todo otro punto fijo A' de $\mathbf{T}$, $A \le A'$.

Semántica de Punto Fijo

Propiedad: Sea $\mathbf{P}$ un programa lógico definido. Entonces $\mathcal{P}(\mathbb{B}_{\mathbf{P}})$ es un retículo completo bajo el orden parcial definido por la relación de inclusión entre conjuntos '$\subseteq$'.

- El conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{B}_{\mathbb{P}})$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathbb{B}_{\mathbb{P}}$, es decir, el conjunto de todas las interpretaciones de Herbrand de $\mathbf{P}$.

Operador de Consecuencia Inmediata (T_P)

Def: Sea $\mathbf{P}$ un programa lógico definido e I una interpretación de Herbrand para $\mathbf{P}$. Definimos el Operador de Consecuencia Inmediata como el mapeo $\mathbf{T_P} : \mathcal{P}(\mathbb{B}_\mathbf{P}) \to \mathcal{P}(\mathbb{B}_\mathbf{P})$ tal que:

$\mathbf{T_P}(I) = \{A \mid A \in \mathbb{B}_\mathbf{P}$, $A \leftarrow B_1 \wedge \ldots \wedge B_n$ es una inst. fija de una regla en $\mathbf{P}$ y $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq I\}$.

Aplicación del operador T_P

1. p(X) :- q(X).
2. q(a).
3. r(b).

$$\mathbb{U}_{\mathbf{P}} = \{a,\ b\}$$

$$\mathbb{B}_{\mathbf{P}} = \{p(a),\ p(b),\ q(a),\ q(b),\ r(a),\ r(b)\}$$

$$I_1 = \{q(b)\}$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{P}}(I_1) = \{p(b),\ q(a),\ r(b)\}$$

$$I_2 = \{r(a),\ r(b)\}$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{P}}(I_2) = \{q(a),\ r(b)\}$$

$$I_3 = \varnothing$$

$$\mathbf{T}_{\mathbf{P}}(I_3) = \{q(a),\ r(b)\}$$

Semántica de Punto Fijo

Def: Sea $\mathbf{P}$ un programa lógico definido. El mínimo punto fijo del operador $\mathbf{T_P}$ constituye el significado asociado a $\mathbf{P}$ de acuerdo a la Semántica de Punto Fijo.

- A continuación, mostraremos que dicho mínimo punto fijo coincide con el límite de una secuencia de interpretaciones, que resulta de iterar el operador $\mathbf{T_P}$ a partir de la interpretación $\varnothing$.

Iteraciones del Operador $\mathbf{T_P}$

- Consideremos la siguiente secuencia (creciente) de interpretaciones:

$$\varnothing,\quad \mathbf{T_P}(\varnothing),\quad \mathbf{T_P}(\mathbf{T_P}(\varnothing)),\quad \mathbf{T_P}(\mathbf{T_P}(\mathbf{T_P}(\varnothing))),\ \ldots$$

$$\mathbf{T_P}\!\uparrow\!0,\quad \mathbf{T_P}\!\uparrow\!1,\quad \mathbf{T_P}\!\uparrow\!2,\quad \mathbf{T_P}\!\uparrow\!3,\ \ldots$$

- La notación estándar para denotar los elementos de esta secuencia de interpretaciones es la siguiente:

$$\mathbf{T_P}\uparrow 0 = \varnothing$$

$$\mathbf{T_P}\uparrow (\mathrm{i}+1) = \mathbf{T_P}(\ \mathbf{T_P}\uparrow \mathrm{i}\ )$$

El mínimo punto fijo del operador $\mathbf{T_P}$ coincide con $\mathbf{T_P}\!\uparrow\!\omega$, el límite de la secuencia que acabamos de introducir.

Cálculo del Menor Punto Fijo

1. p :- q, r.
2. q : - s.
3. t :- u.
4. r.
5. s.

$$\mathbb{U}_{\mathbf{P}} = \{c\}$$

$$\mathbb{B}_{\mathbf{P}} = \{p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u\}$$

$$\mathbf{T_P} \uparrow 0 = \varnothing$$

$$\mathbf{T_P} \uparrow 1 = \mathbf{T_P}(\mathbf{T_P} \uparrow 0) = \mathbf{T_P}(\varnothing) = \{r,\ s\}$$

$$\mathbf{T_P} \uparrow 2 = \mathbf{T_P}(\mathbf{T_P} \uparrow 1) = \mathbf{T_P}(\{r,\ s\}) = \{r,\ s,\ q\}$$

$$\mathbf{T_P} \uparrow 3 = \mathbf{T_P}(\mathbf{T_P} \uparrow 2) = \mathbf{T_P}(\{r,\ s,\ q\}) = \{r,\ s,\ q,\ p\}$$

$$\boxed{\mathbf{T_P} \uparrow 4 = \mathbf{T_P}(\mathbf{T_P} \uparrow 3) = \mathbf{T_P} \uparrow 3 = \mathbf{T_P} \uparrow \omega}$$

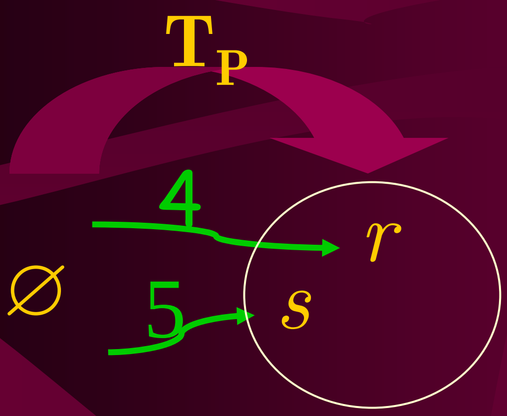
- Como puede verificarse en este ejemplo, $\mathbf{T_P}\uparrow \mathrm{i} \subseteq \mathbf{T_P}\uparrow(\mathrm{i}+1)$ para todo i.

Cálculo del Menor Punto Fijo

1. p :- q, r.
2. q :- s.
3. t :- u.
4. r.
5. s.

$$\mathbb{U}_{\mathbf{P}} = \{c\}$$

$$\mathbb{B}_{\mathbf{P}} = \{p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u\}$$



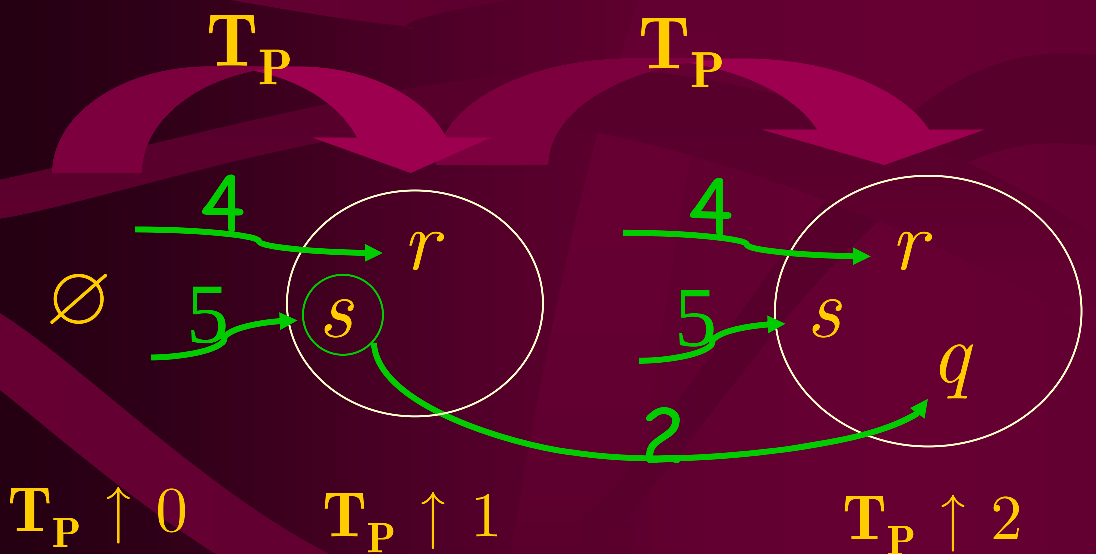
$\mathbf{T}_{\mathbf{P}} \uparrow 0$ $\mathbf{T}_{\mathbf{P}} \uparrow 1$

Cálculo del Menor Punto Fijo

1. p :- q, r.
2. q : - s.
3. t :- u.
4. r.
5. s.

$$\mathbb{U}_{\mathbf{P}} = \{c\}$$

$$\mathbb{B}_{\mathbf{P}} = \{p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u\}$$

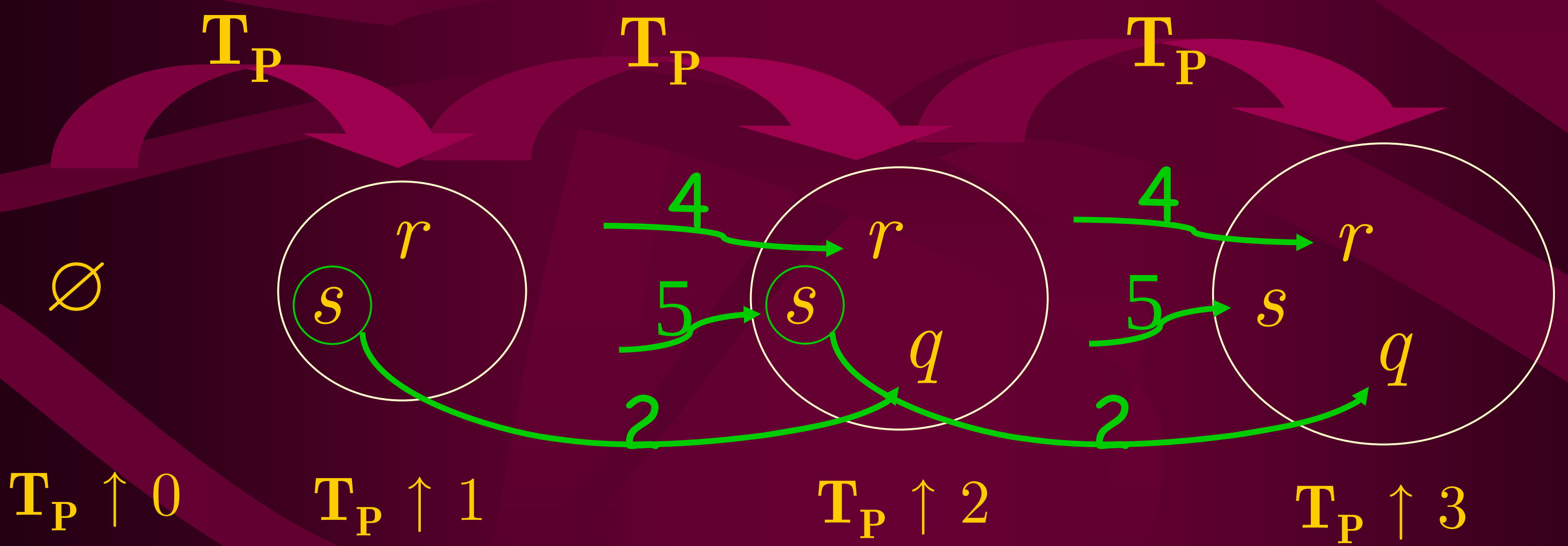


Cálculo del Menor Punto Fijo

1. p :- q, r.
2. q : - s.
3. t :- u.
4. r.
5. s.

$$\mathbb{U}_{\mathbf{P}} = \{c\}$$

$$\mathbb{B}_{\mathbf{P}} = \{p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u\}$$

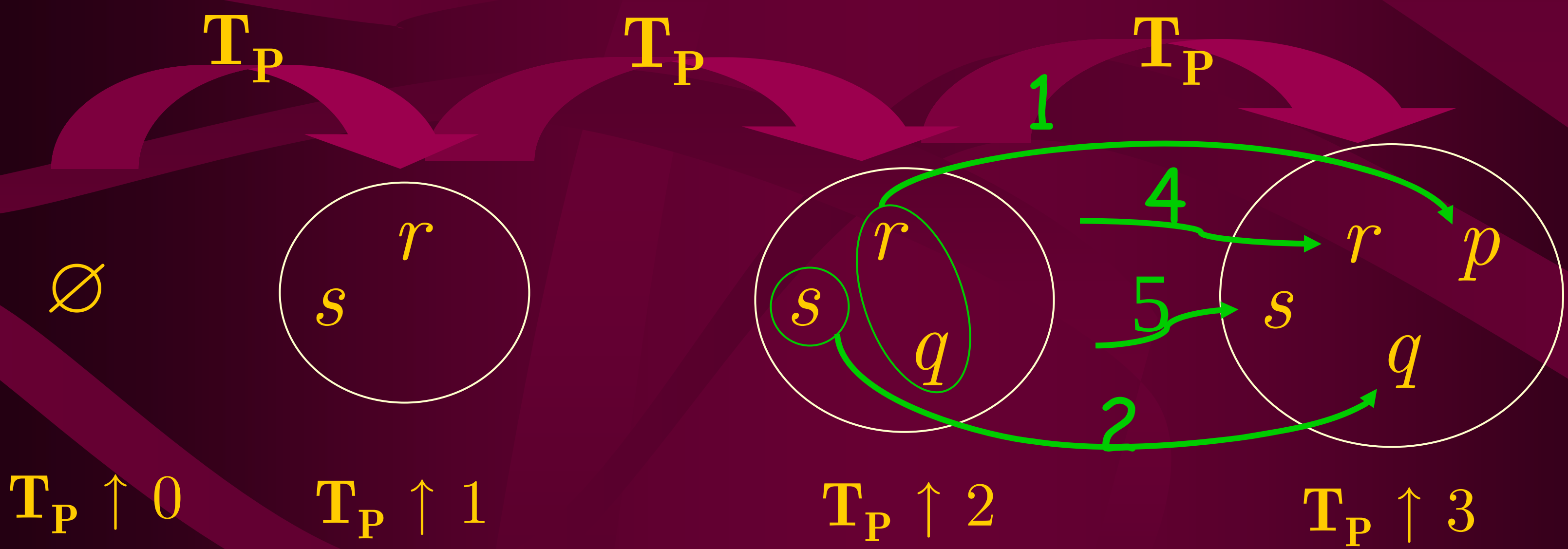


Cálculo del Menor Punto Fijo

1. p :- q, r.
2. q : - s.
3. t :- u.
4. r.
5. s.

$$\mathbb{U}_{\mathbf{P}} = \{c\}$$

$$\mathbb{B}_{\mathbf{P}} = \{p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u\}$$



Cálculo del Menor Punto Fijo

1. p :- q, r.
2. q :- s.
3. t :- u.
4. r.
5. s.

$$\mathbb{U}_{\mathbf{P}} = \{c\}$$

$$\mathbb{B}_{\mathbf{P}} = \{p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ u\}$$

$$\emptyset \xrightarrow{\mathbf{T_P}} \{r,\ s\} \xrightarrow{\mathbf{T_P}} \{r,\ s,\ q\} \xrightarrow{\mathbf{T_P}} \{r,\ p,\ s,\ q\} \xrightarrow{\mathbf{T_P}} \{r,\ p,\ s,\ q\}$$

$$\emptyset \subseteq \{r,\ s\} \subseteq \{r,\ s,\ q\} \subseteq \{r,\ p,\ s,\ q\}$$

$\mathbf{T_P} \uparrow 0$

$\mathbf{T_P} \uparrow 1$
metas con profundidad de prueba 0

$\mathbf{T_P} \uparrow 2$
metas con profundidad de prueba ≤ 1

$\mathbf{T_P} \uparrow 3 = \mathbf{T_P} \uparrow 4$
metas con profundidad de prueba ≤ 2

Cálculo del Menor Punto Fijo

1. par(0).
2. par(s(s(X))) :- par(X).

$\mathbb{U}_{\mathbf{P}} = \{0,\ s(0),\ s(s(0)),$
$s(s(s(0))),\ \ldots\}$
$\mathbb{B}_{\mathbf{P}} = \{\mathrm{par}(0),\ \mathrm{par}(s(0)),$
$\mathrm{par}(s(s(0))),\ \ldots\}$

$$\mathbf{T_P} \uparrow 0 = \varnothing$$

$$\mathbf{T_P} \uparrow 1 = \mathbf{T_P}(\varnothing) = \{\mathrm{par}(0)\}$$

$$\mathbf{T_P} \uparrow 2 = \mathbf{T_P}(\{\mathrm{par}(0)\}) = \{\mathrm{par}(0),\ \mathrm{par}(s(s(0)))\}$$

$$\mathbf{T_P} \uparrow 3 = \mathbf{T_P}\uparrow 2 \cup \{par(s^4(0))\}$$

$$\mathbf{T_P} \uparrow 4 = \mathbf{T_P}\uparrow 3 \cup \{par(s^6(0))\}$$

$\ldots$

$$\mathbf{T_P} \uparrow \omega = \{\ par(s^{2k}(0)) \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\ \}$$

Equivalencia entre las Distintas Semánticas

Teorema:

Sea $\mathbf{P}$ un programa lógico definido. Entonces, el conjunto de éxito para $\mathbf{P}$, el mínimo modelo de Herbrand para $\mathbf{P}$ y el menor punto fijo del operador $\mathbf{T_P}$, coinciden entre sí.

Las distintas semánticas para los programas lógicos coinciden en la forma en que deben ser interpretados.