Departamento de Cs. e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur

Lógica para Ciencias de la Computación

Trabajo Práctico N° 2

Teorías Formales

Primer Cuatrimestre de 2008

Observación importante: Las consultas relacionadas con los temas desarrollados en los trabajos prácticos serán únicamente respondidas durante las propias clases prácticas a lo largo del cursado.

Ejercicios

1. Determinar cuáles de las siguientes teorías formales son correctas de acuerdo a [Dav89], indicando en caso negativo cuál es la condición que no es satisfecha.

   a) La teoría formal $\mathcal{T}_1$ formada por:

   - Los símbolos: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $*$, $+$.
   - $\mathbf{a}$ es una fbf. Si P[1] es una fbfs, entonces $P * \mathbf{b}$, $P * \mathbf{a}$, $P + \mathbf{b}$ y $P + \mathbf{a}$ son fbfs.
   - Los axiomas son: $\mathbf{a}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} * \mathbf{b}$, $\mathbf{b} * \mathbf{b}$.
   - Las reglas de inferencia son:
     1) $P + Q$ es una consecuencia directa de P y Q.
     2) $P * Q$ es una consecuencia directa de $P + Q$.

     para toda fbf P y Q.

   b) La teoría formal $\mathcal{T}_2$ formada por:

   - Los símbolos: $\mathbf{a}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{3}$.
   - $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son fbfs. Si P es una fbf, entonces $P\mathbf{1}$, $P\mathbf{2}$ y $P\mathbf{3}$ son fbfs.
   - Los axiomas son: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.
   - La única regla de inferencia es:
     1) $P\mathbf{1}$ es una consecuencia directa de P, para toda fbf P.

   c) La teoría formal $\mathcal{T}_3$ formada por:

   - Los símbolos: $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$, $\mathbf{5}$, $\mathbf{6}$, $\mathbf{7}$, $\mathbf{8}$, $\mathbf{9}$.
   - Las fbfs son: $\mathbf{5}$, $\mathbf{6}$, $\mathbf{11}$, $\mathbf{12}$, $\mathbf{13}$, $\mathbf{14}$, $\mathbf{15}$, $\mathbf{16}$, $\mathbf{17}$, $\mathbf{18}$, $\mathbf{19}$.
   - Los axiomas son: $\mathbf{15}$, $\mathbf{16}$.
   - La única regla de inferencia es:
     1) $\mathbf{1}P$ es una consecuencia directa de P, para toda fbf P.

   d) La teoría formal $\mathcal{T}_4$ formada por:

   - Los símbolos: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $+$, $-$.

[1] las letras mayúsculas representan metasímbolos.

- $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $+$ son fbfs. Si P es una fbf, entonces $P+\mathbf{b}$, $P*\mathbf{b}$, $P+\mathbf{c}$ y $P*\mathbf{c}$ son fbfs.
- Los axiomas son: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$.
- La única regla de inferencia es:
  1) $P+\mathbf{b}$ es una consecuencia directa de P, para toda fbf P.

e) La teoría formal $\mathcal{T}_5$ formada por:

- Los símbolos: $\mathbf{i}$, $+$.
- $\mathbf{ii}$ es una fbf. Si P es una fbf, entonces $\mathbf{ii}+P$ es una fbf.
- El único axioma es: $\mathbf{ii}+\mathbf{ii}$.
- La única regla de inferencia es:
  1) $\mathbf{i}P\mathbf{i}+\mathbf{i}Q\mathbf{i}$ es consecuencia directa de P y Q, para toda fbf P y Q.

f) La teoría formal $\mathcal{T}_6$ formada por:

- Los símbolos: $\mathbf{i}$.
- $\mathbf{ii}$ es una fbf. Si P es una fbf, entonces $\mathbf{ii}P$ es una fbf.
- El único axioma es: $\mathbf{iiii}$.
- La única regla de inferencia es:
  1) $P\mathbf{ii}Q$ es consecuencia directa de P y Q, para toda fbf P y Q.

2. Sea $\mathcal{T}$ la teoría formal definida como:

- Los símbolos: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\cup$,\$.
- $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son fbfs. Si P y Q son fbfs, entonces $P\cup Q$ y $\$P$ son fbfs.
- $\mathbf{a}$ es un axioma. $\$P$ es un axioma, para toda fbf P.
- La única regla de inferencia es:
  a) $P\cup Q$ es consecuencia directa de P y Q, para toda fbf P y Q.

Considerando cada una de las siguientes cadenas, determinar si son expresiones, fórmulas bien formadas, axiomas y/o teoremas de $\mathcal{T}$. En caso de que la cadena sea una fbf pero no sea un teorema, encontrar (si es que existe) un conjunto de fbfs tales que la cadena en cuestión sea su consecuencia.

a) $\$\$\$\$\$P\cup\$Q$

b) $\$\$\$\$\$\mathbf{a}\$\mathbf{b}$

c) $\mathbf{a}\cup\mathbf{b}\cup\mathbf{b}\cup\mathbf{b}$

d) $\mathbf{a}\cup\mathbf{b}\cup\mathbf{b}\cup\mathbf{b}\cup\mathbf{b}\ldots$ ($\cup\mathbf{b}$ se repite indefinidamente)

e) $\mathbf{a}\cup\$\mathbf{b}\cup\$\mathbf{b}$

f) $\mathbf{a}\cup\mathbf{b}\cup\mathbf{b}\cup\mathbf{a}$

g) $\mathbf{a}\cup\$\mathbf{b}\cup\$\$\mathbf{b}$

h) $\mathbf{a}\$\mathbf{b}\$\mathbf{c}$

3. Determinar, para cada una de las siguientes restricciones, si es posible definir una teoría formal que satisfaga esos condicionamientos. El los casos que sea posible, fundamentar la respuesta suministrada definiendo la teoría formal en cuestión.

a) La cantidad de fbfs es numerable, pero sólo existe una cantidad finita de teoremas.

b) La cantidad de fbfs es finita, pero existe una cantidad infinita de teoremas.

c) La cantidad de fbfs es numerable, pero existe una cantidad infinita de fbfs.

d) Todo teorema es axioma.

e) Algún teorema no es axioma.

f) Ningún teorema es axioma.

g) El conjunto de axiomas incluye al conjunto de fbfs.

4. Sea $\mathcal{T}^\star$ la teoría formal definida como:

   - Los símbolos: **a**, **b**, **c**, **d**, **e**, §.
   - Si $P, Q \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$, entonces $P\S Q$ es una fbf.
   - **a**§**b** y **c**§**d** son axiomas.
   - La única regla de inferencia es:

     a) Para todo $P, Q, R \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$, $P\S R$ es consecuencia directa $P\S Q$ y $Q\S R$.

   Determinar los menores conjuntos no triviales S_i, $1 \leq i \leq 5$, tales que P_i sea deducible de S_i en $\mathcal{T}^\star$.

   a) $P_1 = \mathbf{a}\S\mathbf{b}$

   b) $P_2 = \mathbf{b}\S\mathbf{d}$

   c) $P_3 = \mathbf{a}\S\mathbf{d}$

   d) $P_4 = \mathbf{a}\S\mathbf{e}$

   e) $P_5 = \mathbf{a}\S\mathbf{b}\S\mathbf{c}$

5. Definir formalmente las propiedades de *monotonía*, *compacidad* y *transitividad* [Dav89], y demostrar cada una de ellas a partir de la definición de "es deducible de".

6. Considerando las definiciones de sensato, completo, consistente y decidible provistas en [Dav89], determinar cuáles de las siguientes teorías formales son factibles (justificar de forma apropiada).

   a) Una teoría formal $\mathcal{T}_a$ es sensata pero no completa.

   b) Una teoría formal $\mathcal{T}_b$ es sensata, pero no consistente.

   c) Una teoría formal $\mathcal{T}_c$ es consistente, pero no sensata.

   d) Una teoría formal $\mathcal{T}_d$ es completa, pero no decidible.

   e) Una teoría formal $\mathcal{T}_d$ es decidible, pero no completa.

   f) Una teoría formal $\mathcal{T}_e$ es consistente y completa, pero no sensata.

   g) Una teoría formal $\mathcal{T}_f$ es completa y decidible, pero no sensata.

7. Considerando a las siguientes teorías formales:

   a) $\mathcal{T}_a$, definida como:

   - Alfabeto: $\Sigma = \{\star\}$.
   - Fórmulas bien formadas: Σ^+.

- Axioma: $\star\star$.
- Regla de Inferencia: $P{\star\star}Q$ es una consecuencia directa de P y Q, para toda fbf P, Q.

b) $\mathcal{T}_b$, definida como:

- Alfabeto: $\Sigma = \{\star\}$.
- Fórmulas bien formadas: Σ^+.
- Axioma: $\star$.
- Regla de Inferencia: PP es una consecuencia directa de P, para toda fbf P.

determinar si son sensatas, completas, consistentes y/o decidibles, bajo la suposición de que todas las interpretaciones posibles son sólo las siguientes:

I_1	Interpreta como verdaderas todas aquellas fbfs con un número par de '$\star$', y falsas todas las demás.
I_2	Interpreta como verdaderas todas aquellas fbfs con un número de '$\star$' divisible por 3, y falsas todas las demás.
I_3	Interpreta como verdaderas todas aquellas fbfs con un número de '$\star$' divisible por 4, y falsas todas las demás.

8. Analizar la siguiente afirmación.

   > *Si una teoría formal es sensata y completa, entonces las nociones de* VERDAD *y de* DEDUCCIÓN *son equivalentes, esto es, puede utilizarse una o la otra indistintamente.*

   ¿Es correcta? ¿Por qué?

Ejercicios opcionales

1. Encontrar dos interpretaciones distintas que sean modelos de la teoría formal $\mathcal{T}^\star$ del ejercicio 4.

Referencias

[Dav89] DAVIS, R. E. *Truth, Deduction and Computation: logic and semantics for computer science.* Computer Science Press, 1989.