Departamento de Cs. e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur

Lógica para Ciencias de la Computación

Trabajo Práctico N$^{\underline{o}}$ 3

Lógica Proposicional

Primer Cuatrimestre de 2008

Observación importante: Las consultas relacionadas con los temas desarrollados en los trabajos prácticos serán únicamente respondidas durante las propias clases prácticas a lo largo del cursado.

Ejercicios

1. Comprobar, mediante tabla de verdad, si la siguiente fbf es tautológica:

$$((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$$

2. Las fbfs de la lógica proposicional pueden clasificarse en tres categorías: fbfs lógicamente válidas, fbfs insatisfacibles, o fbfs ni lgicamente válidas ni insatisfacibles. Determinar el tipo de cada una de las siguientes fbfs de acuerdo a la clasificación propuesta.

   a) $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
   b) $((A \to B) \to (B \to C)) \to (A \to C)$
   c) $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
   d) $\neg(A \to B) \equiv (\neg A \vee B)$
   e) $(A \to B) \equiv \neg(A \wedge \neg B)$
   f) $(A \to B) \equiv (B \to A)$
   g) $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$
   h) $(\neg A \to B) \equiv (\neg B \to A)$
   i) $\neg(A \to (B \to A))$
   j) $\neg(A \to B) \to A$

3. Probar que $\wedge$ y $\vee$ son conectivos lógicos conmutativos y asociativos, esto es:

   a) $A \vee B \equiv B \vee A$ y $A \wedge B \equiv B \wedge A$
   b) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ y $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

4. Interpretando a $A \mid B$ como $\neg(A \wedge B)$, probar que $\{|\}$ constituye un conjunto suficiente de conectivos.

5. Demostrar, mediante pruebas sintácticas, los siguientes teoremas del cálculo proposicional:

   a) $\neg\neg A \to A$

b) $A, B \vdash \neg(A \to \neg B)$ (*i.e.*, $A, B \vdash A \wedge B$)

c) $A \equiv \neg\neg A$ (*i.e.*, $(A \to \neg\neg A) \wedge (\neg\neg A \to A)$)

Pista: Probar primero el resultado intermedio $A \to \neg\neg A$, para luego usar este resultado en conjunción con $5a$ y $5b$.

d) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

e) $\neg(A \to \neg B) \vdash B$ (*i.e.*, $A \wedge B \vdash B$)

f) Si $A, B \vdash C$, entonces $\neg(A \to \neg B) \vdash C$ (*i.e.*, $A \wedge B \vdash C$)

g) $A \vdash \neg\neg(A \to \neg B) \to \neg B$ (*i.e.*, $A \vdash \neg(A \wedge B) \to \neg B$)

h) Si $\vdash P \to A$ y $\vdash P \to B$, entonces $\vdash P \to \neg(A \to \neg B)$

i) $\neg A \to (A \to B)$

6. Probar por refutación que las siguientes fbfs son lógicamente válidas:

a) $((A \to B) \wedge (A \to C)) \to (A \to (B \wedge C))$

b) $((A \to B) \wedge (A \wedge C)) \to (B \vee C)$

c) $(\neg(A \vee B)) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$

d) $((A \to (B \wedge (C \vee D))) \wedge (\neg B \vee \neg C)) \to (A \to D)$

e) $(((A \to B) \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

f) $((\neg A \to B) \to (\neg B \to A))$

g) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$

7. Verificar el Lema 2.5.4 de [Dav89] sobre los siguientes conjuntos insatisfacibles minimales:

a) $S_1 = \{A, \neg A \vee B, \neg B \vee C, \neg C\}$

b) $S_2 = \{A, B, \neg C, D, \neg E, \neg A \vee F, \neg B \vee C \vee G, \neg D \vee \neg H, \neg G \vee H \vee I, E \vee \neg F \vee \neg I\}$

8. Considerando las siguientes fbfs:

i. A	iv. $\neg A \vee B$	vii. $A \to B$
ii. B	v. $\neg B \to A$	viii. $\neg B \to \neg A$
iii. $A \vee B$	vi. $A \leftrightarrow B$	ix. $A \wedge \neg B$

determinar cúales son implicadas lógicamente por cada una de las sentencias indicadas a continuación:

a) $A \wedge B$

b) $A \to B$

c) $A \vee B$

d) $A \leftrightarrow B$

9. Demostrar que la siguiente teoría basada en el lenguaje del cálculo proposicional satisface la metapropiedad sensatez:

- Axiomas:

  a) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

- Reglas de Inferencia:
  a) $A \vdash A \vee B$
  b) $A, B \vdash A \wedge B$
  c) $\neg A, B \rightarrow A \vdash \neg B$

10. Para cada uno de los siguientes casos determinar si la teoría caracterizada es sensata, completa, consistente y/o decidible. En el caso de que la información suministrada resultara insuficiente para determinar alguna de las respuestas, fundamentar el por qué.

    a) El lenguaje y los axiomas del cálculo proposicional con la única regla de inferencia $A \vdash A \vee B$.
    b) Una teoría en la cual toda fbf es deducible.
    c) El lenguaje del cálculo proposicional con el axioma $A \rightarrow \neg B$ y la regla de inferencia $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash B$.
    d) Una teoría en la cual alguna tautología no es deducible.
    e) El lenguaje del cálculo proposicional con el axioma $A \rightarrow B$ y la regla de inferencia *Modus Ponens*.
    f) Una teoría en la cual alguna fbf no tautológica es deducible.
    g) El lenguaje del cálculo proposicional con un esquema de axioma y ninguna regla de inferencia.
    h) Una teoría en la cual sólo los teoremas son deducibles.

11. ¿Qué relación existe —si es que alguna— entre las nociones metateóricas de completitud, sensatez, consistencia y decibilidad? Esto es, ¿son totalmente independientes o conocer una propiedad implica que otra deba satisfacerse?

12. Para cada una de las siguientes restricciones definir una teoría que las satisfaga:

    a) sensata, no completa, consistente.
    b) no sensata, completa, no consistente.
    c) no sensata, no completa, consistente.

Ejercicios Opcionales

1. Probar que toda fbf de la lógica proposicional conteniendo sólo al conectivo $\equiv$ (*i.e.*, $\leftrightarrow$) es válida, si, y sólo si, cada constante proposicional aparece un número par de veces. Por ejemplo, $(P \equiv Q) \equiv (P \equiv (Q \equiv P))$ no es válida pues P aparece un número impar de veces.

   PISTA: En primer lugar inducir sobre la cantidad de veces que aparece una constante proposicional dada. Luego generalizar el resultado anterior induciendo sobre la cantidad de constantes proposicionales.

Referencias

[Dav89] DAVIS, R. E. *Truth, Deduction and Computation: logic and semantics for computer science*. Computer Science Press, 1989.