Departamento de Cs. e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur

Lógica para Ciencias de la Computación

Trabajo Práctico N° 4

Cálculo de Predicados

Primer Cuatrimestre de 2008

Observación importante: Las consultas relacionadas con los temas desarrollados en los trabajos prácticos serán únicamente respondidas durante las propias clases prácticas a lo largo del cursado.

Ejercicios

1. Determinar para cada una de las variables X, Y y Z si está libre, ligada o ambas cosas en el marco de las siguientes fbfs:

   a) $(\forall X)p(f(X), Y, Z) \rightarrow \neg p(Z, X, Y)$
   b) $(\forall Z)p(g(Z), a, Y) \wedge (\forall Y)\neg q(X, Y)$
   c) $(\forall X)p(X, Y, Z) \wedge (\forall Y)s(f(X), Z, Y) \vee r(Z)$
   d) $(\forall Y)p(Y, a, Z) \rightarrow (\forall Z)q(X, Z) \wedge p(X, a, Z)$

2. Determinar si cada uno de los siguientes términos,

   - $h(X, Y)$
   - $g(a, f(Y, Z))$

   está libre para cada una de las variables X, Y y Z, en el contexto de las siguientes fbfs:

   a) $(\forall Z)(p(Z, Y, a) \wedge (\forall X)q(g(Z)))$
   b) $(\forall X)p(f(X), Y) \rightarrow \neg p(f(X), Z)$
   c) $p(f(X), X) \rightarrow (\forall Z)\neg p(f(Y), Z)$

   Observación: Deben ser consideradas $3 \times 2 \times 3 = 18$ combinaciones en total.

3. Para cada una de las siguientes fórmulas bien formadas, decidir si bajo la interpretación que adopta como dominio a los enteros, donde $p(X, Y)$ significa $x \leq y$ e $i(X, Y)$ significa $X = Y$, la fórmula en cuestión resulta verdadera, falsa, o ni verdadera ni falsa.

   a) $(\forall X)(\exists Y)p(X, Y) \rightarrow (\exists Y)(\forall X)p(X, Y)$
   b) $(\forall X)(\forall Y)p(X, Y) \rightarrow (\forall Y)(\forall X)p(X, Y)$
   c) $(\exists X)(\forall Y)p(X, Y)$
   d) $(\forall Y)(\exists X)p(X, Y)$
   e) $(\forall X)(\forall Y)(\forall Z)(p(X, Y) \wedge p(Y, Z) \rightarrow p(X, Z))$
   f) $(\exists X)(\forall Y)p(X, Y) \wedge p(Y, X)$
   g) $(\forall Y)(\exists X)p(X, Y) \wedge p(Y, X)$
   h) $(\forall X)(\forall Y)(p(X, Y) \wedge p(Y, X) \rightarrow i(X, Y))$

4. Para cada una de las siguientes fórmulas,

   a) $(\forall X)a(Z,X) \vee b(X,Y) \rightarrow (\forall X)(a(Z,X)) \vee (\forall X)(b(X,Y))$
   b) $(\forall X)(\forall Y)p(X,Y) \rightarrow (\forall X)(\forall Y)p(Y,X)$
   c) $p(X,Y) \rightarrow p(Y,X)$
   d) $p(f(X)) \rightarrow p(X)$
   e) $(\forall X)(p(X) \rightarrow p(f(X)))$
   f) $(\forall X)p(X) \rightarrow p(f(X))$
   g) $(\forall X)(\forall Y)(\forall Z)(p(X,Y) \rightarrow (q(Z) \rightarrow p(X,Y))$
   h) $(\forall X)p(Y)$
   i) $\neg((\exists X)p(X) \vee \neg p(X))$

   determinar cuáles de las siguientes propiedades son satisfechas:

   a) Es lógicamente válida.
   b) Es verdadera en una interpretación, pero no es lógicamente válida.
   c) Es satisfacible, pero no es verdadera en alguna interpretación.
   d) Es satisfacible, pero es falsa en alguna otra interpretación.
   e) Es falsa en una interpretación, pero no es insatisfacible.
   f) Es insatisfacible.

5. Para cada una de las siguientes situaciones, encontrar una fbf del cálculo de predicados que la satisfaga. Justificar su respuesta (indicando explícitamente las interpretaciones consideradas).

   a) Que sea verdadera en una dada interpretación, pero no lógicamente válida.
   b) Que sea ni verdadera ni falsa para una cierta interpretación.
   c) Que sea satisfacible y a la vez no lógicamente válida.
   d) Que sea verdadera en alguna interpretación y falsa en otra.
   e) Que sea falsa, pero no contradictoria.
   f) Que sea lógicamente válida.
   g) Que sea contradictoria (esto es, insatisfacible).

6. Demostrar cada uno de los siguientes teoremas del cálculo de predicados:

   a) $(\forall X)(\forall Y)(p(X,Y) \rightarrow q(X)) \rightarrow (\forall Y)(\forall X)(p(X,Y) \rightarrow q(X))$
   b) $\neg((\forall X)\neg((\forall Y)a)) \rightarrow (\forall Y)\neg((\forall X)\neg a)$
   c) $(\forall X)(\forall Y)p(X,Y) \rightarrow (\forall X)(\forall Y)p(Y,X)$
   d) $(\forall X_1)\ldots(\forall X_n)p \wedge q \rightarrow (\forall X_1)\ldots(\forall X_n)(p) \wedge (\forall X_1)\ldots(\forall X_n)(q)$
   e) $(\forall X_1)\ldots(\forall X_n)p \rightarrow (\forall X_1)\ldots(\forall X_{n-1})p$

7. Calcular el unificador más general para cada uno de los siguientes pares de términos. De no existir el unificador más general, explicar la causa.

   a) $h(X, f(a, X))$ y $h(b, Y)$
   b) $h(X, f(g(a, X), Z))$ y $h(b, f(g(a, f(W, c)), h(Y, X)))$
   c) $f(a, f(b, f(c, X)))$ y $f(a, Y)$
   d) $h(X, f(g(a, Y), Z))$ y $h(b, f(g(a, f(W, c)), h(Y, X)))$
   e) $f(X, f(a, f(Y, c)))$ y $f(Z, f(Z, f(f(a, c), W)))$

   Observación: De acuerdo a la convención adoptada, las letras mayúsculas denotan variables y las minúsculas constantes y estructuras.

8. Sea α la siguiente fbf del cálculo de predicados:

$$(\forall X)(q(X) \wedge p(a) \rightarrow (\forall Y)(p(Y) \rightarrow q(a)))$$

   a) Mostrar que α es verdadera en al menos una interpretación, pero que no es lógicamente válida.

   b) Una eventual prueba para α podría ser:

1.	$q(X) \vdash q(X)$	Def. Deducción
2.	$q(X) \vdash (\forall X)q(X)$	GEN (1)
3.	$\vdash (\forall X)q(X) \rightarrow q(a)$	**PC4**
4.	$q(X) \vdash q(a)$	MP (2,3)
5.	$\vdash q(a) \rightarrow (p(Y) \rightarrow q(a))$	**PC1**
6.	$q(X) \vdash p(Y) \rightarrow q(a)$	MP (4,5)
7.	$q(X) \vdash (\forall Y)(p(Y) \rightarrow q(a))$	GEN (6)
8.	$\vdash (\forall Y)(p(Y) \rightarrow q(a)) \rightarrow (p(Y) \rightarrow (\forall Y)(p(Y) \rightarrow q(a)))$	**PC1**
9.	$q(X) \vdash p(Y) \rightarrow (\forall Y)(p(Y) \rightarrow q(a))$	MP (7,8)
10.	$q(X) \vdash (\forall Y)(p(Y) \rightarrow (\forall Y)(p(Y) \rightarrow q(a)))$	GEN (9)
11.	$\vdash (\forall Y)(p(Y) \rightarrow (\forall Y)(p(Y) \rightarrow q(a))) \rightarrow$ $(p(a) \rightarrow (\forall Y)(p(Y) \rightarrow q(a)))$	**PC4**
12.	$q(X) \vdash p(a) \rightarrow (\forall Y)(p(Y) \rightarrow q(a))$	MP (10,11)
13.	$\vdash q(X) \rightarrow (p(a) \rightarrow (\forall Y)(p(Y) \rightarrow q(a)))$	TD (12)
14.	$\vdash q(X) \wedge p(a) \rightarrow (\forall Y)(p(Y) \rightarrow q(a))$	Prueba Aux. (13)
15.	$\vdash (\forall X)(q(X) \wedge p(a) \rightarrow (\forall Y)(p(Y) \rightarrow q(a)))$	GEN (14)

   Suponiendo que la prueba anterior es correcta, y considerando que α no es lógicamente válida, analizar la veracidad de los siguientes argumentos justificando de manera apropiada.

   1) Dado que en $\mathcal{PC}$ es derivable una fbf que no es válida y otras que sí lo son, entonces $\mathcal{PC}$ no es consistente.
   2) Dado que en $\mathcal{PC}$ es derivable una fbf que no es válida, entonces $\mathcal{PC}$ no es sensato.
   3) Algunas deducciones en $\mathcal{PC}$ producen fbfs que no son teoremas.
   4) En $\mathcal{PC}$ se derivan sólo fórmulas satisfacibles.
   5) Dado que en $\mathcal{PC}$ es derivable una fórmula que no es verdadera en una interpretación, los teoremas de $\mathcal{PC}$ no son lógicamente válidos.

   c) ¿Por qué es incorrecta la deducción anterior?

9. Intentar refutar por resolución cada uno de los siguientes conjuntos de cláusulas. Para los casos en que no sea posible, señalar claramente a qué se debe.

   a) $p(a, X, X)$
   $p(f(X, Y), W, f(X, Z)) \vee \neg p(Y, W, Z)$
   $\neg p(f(a, f(b, a)), f(c, a), X)$

   b) $q(X, a, a)$
   $q(X, f(X, Y), Z) \vee \neg q(X, Y, Z)$
   $q(X, f(Y, Z), f(Y, W)) \vee \neg q(X, Z, W)$
   $\neg q(b, f(b, f(c, f(b, a))), X)$

   c) $r(a, b)$
   $r(f(X, Y), g(Z)) \vee \neg r(Y, Z)$
   $\neg r(f(X, f(c, f(d, a))), W)$

   d) $s(X, Y, X)$
   $s(f(X), Y, Z) \vee \neg s(Y, X, f(Y))$
   $\neg s(f(a), Z, g(a, b))$

   Tener en cuenta las siguientes observaciones:

   - Estandarizar aparte cada par de cláusulas *antes* de ensayar la unificación.
   - Indicar *claramente* la sustitución unificadora.
   - Aplicar la sustitución unificadora a *ambas* cláusulas.
   - En una refutación, no existe límite alguno con respecto a la cantidad de veces que se puede usar cada cláusula.

10. Demostrar la validez de la siguiente fbf refutando por resolución a su negación:

$$(\forall X_1)(\forall X_2)(\exists Y)[(p(X_1) \rightarrow q(X_2, Y)) \rightarrow (\forall Z)((q(X_2, Y) \rightarrow r(Z)) \rightarrow (p(X_1) \rightarrow r(Z)))]$$

11. Codificar las siguientes afirmaciones como fórmulas del cálculo de predicados y a continuación mostrar que cada conclusión alcanzada puede ser obtenida en base a las premisas señaladas:

    a) Las mascotas pueden ser o bien perros o bien gatos. Sabemos que todo perro ladra y que todo gato maulla. En consecuencia, podemos afirmar que toda mascota o bien ladra o bien maulla.

    b) Se conoce que todos los dragones son reptiles, y que los reptiles respiran fuego. También sabemos que ningún dragon respira fuego, por lo que podemos concluir que los dragones no existen.

    c) Sin duda, los ornitorrincos son mamíferos. También se sabe que los ornitorrincos ponen huevos. En consecuencia, si los ornitorrincos existiesen, habría al menos un mamífero que pone huevos.

12. Empleando el lenguaje de del cálculo de predicados, reformular tanto a los hechos como a la pregunta que aparecen en el siguiente acertijo. Posteriormente, determinar cuál es la respuesta correcta aplicando resolución.

Tomás, Miguel y Juan pertenecen al Club Alpino. Todo miembro del Club Alpino es o un esquiador o un escalador de montañas o ambos. A ningún escalador de montañas le gusta la lluvia, y a todo esquiador le gusta la nieve. A Miguel le desagrada lo que le gusta a Tomás y le gusta lo que Tomás desprecia. A Tomás le agradan la lluvia y la nieve.

¿Algún miembro del Club Alpino será escalador de montañas pero no esquiador?

13. Considerando las siguientes afirmaciones,

    a) Toda persona que considere a Graciela como una persona agradable, seguramente tendrá a Eleonora entre sus amigas.

    b) Eleonora no es amiga de nadie que sea amiga de Cristina.

    c) Beatriz solamente elegirá sus amigas entre las amigas de Alicia.

    hallar sus respectivas representaciones en el cálculo de predicados y probar que si Alicia es amiga de Cristina, entonces a Beatriz no le agrada Graciela.

Ejercicios opcionales

1. Considendo las siguientes fbfs del cálculo de predicados,

    $$\alpha = (\forall X)p(X, X)$$
    $$\beta = (\forall X)(\forall Y)(\forall Z)(p(X, Y) \wedge p(Y, Z) \rightarrow p(X, Z))$$
    $$\gamma = (\forall X)(\forall Y)p(X, Y) \vee p(Y, X)$$

    demostrar que la fórmula $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \rightarrow (\exists X)(\forall Y)p(Y, X)$ es verdadera en cualquier interpretación con dominio finito.

    PISTA: aplicar inducción sobre el número de elementos del dominio.

2. Siguiendo el espíritu del ejercicio 11, encontrar una codificación como fórmulas del cálculo de predicados para las siguientes situaciones de forma tal que sea posible derivar la conclusión alcanzada a partir de las premisas expuestas:

    a) Paco admira a todos los que lo admiran a él. Por lo tanto, si Pepa admira a Paco, Paco admira a Pepa.

    b) Existen personas que no admiran persona alguna que los admire a ellos. En consecuencia, podemos afirmar que existen personas que no se admiran a ellos mismos.

    c) Todos los que tocan el ukulele son admirados por todos los que no lo tocan. Peta no admira a McDonald. McDonald admira a una persona sólo si esa persona lo admira a él. Por lo tanto, McDonald toca el ukulele si, y sólo si, Peta toca el ukelele.

    d) Sólo los animales que no matan a sus presas practican la necrofagia. Gracie siempre mata a sus presas, por lo que Gracie no es necrófaga.

Referencias

[Dav89] DAVIS, R. E. *Truth, Deduction and Computation: logic and semantics for computer science.* Computer Science Press, 1989.