



LÓGICA PARA CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Trabajo Práctico N° 7

Lógicas Modales

Primer Cuatrimestre de 2008

Observación importante: Las consultas relacionadas con los temas desarrollados en los trabajos prácticos serán únicamente respondidas durante las propias clases prácticas a lo largo del cursado.

Ejercicios

1. Teniendo en cuenta la equivalencia sintáctica entre los distintos operadores modales de la misma categoría (por caso, los operadores deónticos “obligatorio” y “permitido”, o los operadores aléthicos “necesario” y “posible”), convertir las siguientes frases conteniendo alguno de estos operadores en una frase equivalente, pero expresada en términos de su modalidad complementaria asociada.
 - a) En este país, la cotización del euro siempre sube.
 - b) Tal vez pase por tu casa, si salgo temprano del trabajo.
 - c) No necesariamente quiero ver el partido de la selección.
 - d) Ir al baño hace que sea obligatorio lavarse las manos.
 - e) ¡Señor!, no está permitido estacionar en doble fila.
 - f) En realidad, está permitido llevarse la toalla del hotel.
 - g) La Argentina siempre ha sido un país con mucho potencial.
 - h) No es la primera vez, ya han discutido alguna vez con anterioridad.
 - i) Es posible que las lógicas modales permitan representar interesantes situaciones de la vida real.
 - j) Si es posible representar interesantes situaciones de la vida real mediante lógicas modales, entonces su estudio será necesariamente parte de la curricula.
2. Definir formalmente al Sistema Modal Proposicional Normal $\mathcal{SMN}$.
3. Enunciar los axiomas modales conocidos como **T**, **D**, **4**, **5**, **B** y **L**, y en los casos en donde sea posible, esbozar una interpretación intuitiva para cada una de éstos. ¿Cuál sería la consecuencia de agregar alguno de estos axiomas al sistema $\mathcal{SMN}$?
4. Semántica de Mundos Posibles:
 - a) Definir los conceptos de *marco* y *modelo*.
 - b) ¿Qué denota la expresión $\langle \Omega, R, V \rangle \models_{\omega} \phi$? Ejemplificar mediante un caso concreto.

- c) ¿Bajo qué circunstancias una sentencia ϕ se dice *válida* en un modelo $\langle \Omega, R, V \rangle$? Ejemplificar nuevamente mediante un caso concreto.
- d) ¿Bajo qué condiciones una sentencia ϕ es *válida* en un marco $\langle \Omega, R \rangle$? De ser posible, adaptar el ejemplo anterior a este nuevo escenario.
- e) ¿Qué se debe verificar para que una sentencia ϕ sea *válida* en todos los marcos? Proponer un ejemplo en concreto.
5. Considerando un $\mathcal{SMN}$ definido sobre el lenguaje de letras proposicionales $L = \{a, b, c, d\}$, y el modelo $\langle \Omega, R, V \rangle$, donde:
- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7\}$
 - $R = \{(\omega_1, \omega_2), (\omega_2, \omega_4), (\omega_2, \omega_5), (\omega_5, \omega_7), (\omega_4, \omega_7), (\omega_6, \omega_7), (\omega_3, \omega_6), (\omega_1, \omega_3)\}$
 - $V(\omega, p) = 1$ para los pares $\{(\omega_4, b), (\omega_4, d), (\omega_5, d), (\omega_6, c), (\omega_6, d), (\omega_2, a)\}$, asumiéndose que $V(\omega, p) = 0$ en todo otro caso.

En este contexto, determinar en qué mundos $\omega_i \in \Omega$ son válidas las siguientes sentencias:

- a) $\Box a$
 - b) $\Box \neg b$
 - c) $\Box \Diamond d$
 - d) $\Diamond \Box d$
 - e) $\Box \Box d$
 - f) $\Box(\neg a \wedge \neg b)$
 - g) $a \rightarrow a$
 - h) $a \rightarrow b$
 - i) $a \rightarrow \Diamond b$
6. Demostrar formalmente que las siguientes fórmulas bien formadas se satisfacen en todo marco cuya relación de accesibilidad cumpla las restricciones indicadas.
- a) $\Box A \rightarrow \Box \Box A$, para los marcos transitivos.
 - b) $A \rightarrow \Box \Diamond A$, para los marcos simétricos.
7. Pedro y Pablo son grandes amigos, que se conocen hace bastante tiempo. Pablo le pidió a Pedro que le haga un préstamo (situación que representaremos mediante la proposición p), pero Pedro *hoy* no quiere prestarle nada a Pablo, porque afirma que siendo posible que Pablo no devuelva el empréstito (situación que representaremos mediante la proposición q), no quiere correr riesgos. En otras palabras, Pedro imagina una situación *a futuro* en donde se verifica $\neg q$, y por esa razón hipotética, considera que *hoy* corresponde que $\neg p$ (esta regla es una especie de “axioma” para Pedro). No obstante, Pablo argumenta que *a futuro* el tiene la intención de devolver el préstamo a su amigo, por lo que no debería hacerse tanta mala sangre.

En este contexto, capturar la situación actual, junto con los dos hipotéticos futuros mediante un modelo modal de mundos posibles, indicando todas las fórmulas satisfechas en cada estado.

8. El Tic-Tac-Toe es un juego entre dos oponentes, similar al Ta-Te-Tí, en el cual las fichas son ubicadas en el tablero en su posición definitiva. Cada configuración posible del tablero constituye un estado. En todo estado final (aquellos en los cuales el juego no puede continuar) es posible determinar si un jugador ganó, perdió o empató la partida. Para un estado final S , denotamos $S \models g$, $S \models p$ o $S \models e$ si en el estado S el jugador $\times$ ganó, perdió o empató respectivamente.

Considerando como relación de accesibilidad a la inducida por las jugadas válidas que se dan en este juego (asumiendo que $\times$ juega primero), sería interesante que en el contexto de una lógica modal proposicional normal la fórmula $\Box g$ representara “ $\times$ necesariamente ganará”, la fórmula $\Diamond e$ representara “es posible que $\times$ empate”, y así sucesivamente. No obstante, la lógica modal tal cual sugerida no satisface el comportamiento deseado.

- a) La regla de necesitación, ¿tendrá sentido en este contexto?
b) Determinar todas las fórmulas que deberían ser satisfechas en el siguiente estado:

o		×
	o	
×		×

- c) Intuitivamente, ¿qué formulas deberían ser satisfechas por el estado inicial (*i.e.*, el tablero sin fichas)? ¿Son satisfechas por la modelización propuesta?
d) ¿Qué axioma (**K**, **T**, **D**, **4**, **5**, **B** o **L**) debemos incorporar a la formalización sugerida para alcanzar el comportamiento deseado?
e) Para cada uno de los siguientes axiomas, decidir si resultaría sensata su incorporación al modelo modal en discusión.
- 1) $\Diamond e$
 - 2) $\Box(g \vee e \vee p)$
 - 3) $\Box \neg(g \wedge p)$
 - 4) $\Diamond g \rightarrow \Box \neg p$
 - 5) $\Diamond e \rightarrow \neg \Box g$